

# 3次元シェルピンスキー・ガスケット上のループ・イレーズド・ランダムウォーク

学修番号 15878301

芦沢 宏治

## 目 次

1	イントロダクション	2
2	3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケットとループ・イレースド・ランダムウォークの構成	3
2.1	3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケット	3
2.2	パス空間とループ消去	5
3	確率測度と生成関数	12
4	ループ・イレースド・ランダムウォークの連続極限の存在	16
4.1	3次元シェルピンスキー・ガスケット上のパス空間	16
4.2	連続極限	18
5	Appendix A	27
6	Appendix B	29

## 1 イントロダクション

この論文では、3次元シェルピンスキー・ガスケットというフラクタル上のループ・イレースド・ランダムウォークの連続極限の存在について扱っている。シェルピンスキー・ガスケットおよびループ・イレースド・ランダムウォークについては後で説明する。2次元のシェルピンスキー・ガスケットにおけるループ・イレースド・ランダムウォークについては、連続極限の存在や様々な性質が得られている ([2])。さらに2次元のシェルピンスキー・ガスケット上のループ・イレースド・ランダムウォークでは、ループを大きい順に消して構成するとき、ループができた順に消したときの分布が一致することが証明されている ([6])。一方、3次元に拡張したシェルピンスキー・ガスケット上のループ・イレースド・ランダムウォークについては何も調べられていない。本論文では、2次元のシェルピンスキー・ガスケットに対して用いられたループを大きい順に消して構成する方法を、3次元のシェルピンスキー・ガスケットに適用してループ・イレースド・ランダムウォークを構成できることを示す。3次元では

2次元では存在しなかった困難が生じるが、連続極限の存在を証明した。また、パスのループ和の計算は、3次元になるとかなり計算量が多くなるため Mathematica を用いて計算した (Appendix B)。第2章では、3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケットとループ消去の手順など、第3章で扱うループ・イレースド・ランダムウォークの確率測度を定義するために用いる記号や定義をまとめた。第3章では、ループ・イレースド・ランダムウォークの確率測度と生成関数に関する定義と命題を述べる。第4章では、連続極限の存在を証明するための準備と、連続極限の存在の証明をまとめた。Appendix A では、本論文で用いた分枝過程の基本的な事項をまとめた。Appendix B では、パスのループ和の計算についてまとめた。

#### 謝辞

この研究に取り組むにあたり、2年間お世話になり論文作成に最後まで指導していただいた服部久美子教授に、心から感謝しています。また、ゼミで共に議論してくださった同研究室の先輩や後輩たちにも、心から感謝しています。

## 2 3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケットとループ・イレースド・ランダムウォークの構成

### 2.1 3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケット

まず、3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケットとよばれる無限グラフを定義する。これは3次元シェルピンスキー・ガスケットというフラクタルの離散近似に相当する。次に、このグラフ上のパス (辺に沿って動く軌跡) を定義し、粗視化およびループ消去の操作を導入する。

**定義 2.1** (3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケット).  $O = (0, 0, 0)$ ,  $a_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ ,  $b_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $c_0 = (1, 0, 0)$  とする。また,  $G'_0 = \{O, a_0, b_0, c_0\}$ ,  $E'_0 = \{\{O, a_0\}, \{O, b_0\}, \{O, c_0\}, \{a_0, b_0\}, \{a_0, c_0\}, \{b_0, c_0\}\}$ ,  $F'_0 = G(G'_0, E'_0)$  とおく (図 1)。ここで,  $G(G'_0, E'_0)$  は  $G'_0$  を頂点の集合,  $E'_0$  を辺の集合とするグラフである。以下では,  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  とする。

また、帰納的にグラフの列  $\{F'_N\}_{N=0}^\infty$  を

$$F'_{N+1} = F'_N \cup (F'_N + 2^N a_0) \cup (F'_N + 2^N b_0) \cup (F'_N + 2^N c_0)$$

のように定義する ( $N \in \mathbb{Z}_+$ ). ここで,  $F'_N + a$  は,  $F'_N + a = \{x + a : x \in F'_N\}$  とする.

$F'_N$  と,  $F'_N$  を  $yz$  平面に関して折り返したものの和集合を  $F''_N$  とおき,  $F_0 = \bigcup_{N=0}^{\infty} F''_N$  とする. このようにして得られた  $F_0$  を (無限)3次元プレ・シェルピンスキー・ガスケットという.

さらに,  $G_0$  と  $E_0$  をそれぞれ  $F_0$  の点の集合と辺の集合とする. 各  $N \in \mathbb{Z}_+$  に対して,  $F_N = 2^N F_0$  とおき,

$$G_N = \{2^N x : x \in G_0\}, E_N = \{2^N \{x, y\} : \{x, y\} \in E_0\}$$

とする. つまり,  $F_N$  は 1 辺の長さが  $2^N$  の粗い 3 次元プレ・シェルピンスキー・ガスケットである.

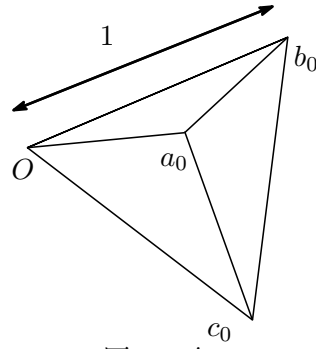


図 1  $F'_0$

次に  $F_0$  上のパスと, それに関連する用語を定義する.

**定義 2.2** ( $F_0$  上のパス).  $F_0$  上の有限長さのパスの集合  $W$  を次のように定義する.

$$W = \{w = (w(0), w(1), \dots, w(n)) : w(0) \in G_0, \{w(i-1), w(i)\} \in E_0, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}.$$

$O$  出発のパスの集合を  $W^*$  とする. つまり,

$$W^* = \{w = (w(0), w(1), \dots, w(n)) \in W : w(0) = O\}.$$

また,  $l(w)$  を  $w$  の長さとする. すなわち,  $w = (w(0), w(1), \dots, w(n))$  に対して,  $l(w) = n$  とする.

**定義 2.3** (自己回避パス).  $w \in W^*$  で, 一度通った点を通らない (自己回避) パス全体を  $\Gamma$  とする. つまり,

$\Gamma = \{w = (w(0), w(1), \dots, w(n)) \in W^* : w(i) \neq w(j), 0 \leq i < j \leq n, n \in \mathbb{N}\}.$

**定義 2.4** (到達時刻).  $w \in W, A \subset G_0$  に対して

$$T_A(w) = \inf \{j \geq 0 : w(j) \in A\}$$

と定義する. ここで,  $\inf \phi = \infty$  とする.

$w \in W, M \in \mathbb{Z}_+$  に対して  $G_M$  の到達時刻の列  $\{T_i^M(w)\}_{i=0}^m$  を次のように定める.

$$T_i^M(w) = \begin{cases} T_{G_M}, & (i = 0), \\ \inf \{j > T_{i-1}^M(w) : w(j) \in G_M \setminus \{w(T_{i-1}^M(w))\}\}, & (i \geq 1). \end{cases} \quad (1)$$

ただし,  $m = \inf \{j \geq 0 : T_{j+1}^M(w) = \infty\}$  とする.  $T_i^M$  は,  $F_0$  上のパス  $w$  が  $i$  回目に  $G_M$  の点を訪れる時刻を表す (ただし, 同じ点を連続して複数回訪れたときは 1 回とみなす).

## 2.2 パス空間とループ消去

**定義 2.5** (パスの種類 1). 各  $N \in \mathbb{Z}_+$  に対し,  $O$  から  $a_N$  へのパスで,  $F'_N$  を折り返してできた三角錐の頂点  $a'_N, b'_N, c'_N$  を通らないものを 3 種類に分ける.

(1)  $W_N^1$  ( $O$  から  $a_N$  にいく途中,  $b_N, c_N$  を通らない)

$$W_N^1 = \{w = (w(0), w(1), \dots, w(n)) \in W^* : w(n) = a_N, T_1^N(w) = n\},$$

(2)  $W_N^2$  ( $O$  から  $a_N$  にいく途中  $b_N$  を通るが,  $c_N$  を通らない)

$$W_N^2 = \{w = (w(0), w(1), \dots, w(n)) \in W^* : w(n) = a_N, w(T_1^N(w)) = b_N, T_2^N(w) = n\},$$

(3)  $W_N^3$  ( $O$  から  $b_N, c_N$  の順で通り  $a_N$  にいく)

$$W_N^3 = \{w = (w(0), w(1), \dots, w(n)) \in W^* : w(n) = a_N, w(T_1^N(w)) = b_N, w(T_2^N(w)) = c_N, T_3^N(w) = n\}.$$

また, 補助的に次のような 2 本のパスの組を導入する.

**定義 2.6** (パスの種類 2).  $W_N^4$  ( $O$  から  $a_N, b_N$  から  $c_N$  の互いに交差しな  
い 2 本のパスの組)

$$W_N^4 = \{(w_1, w_2) \in W^* \times W : w_1(0) = O, w_1(T_1^N(w_1)) = a_N, w_2(0) = b_N, w_2(T_1^N(w_2)) = c_N\}.$$

また, 自己回避なパスの空間の種類を次のように表す.

$$W_N^k \cap \Gamma = \hat{W}_N^k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

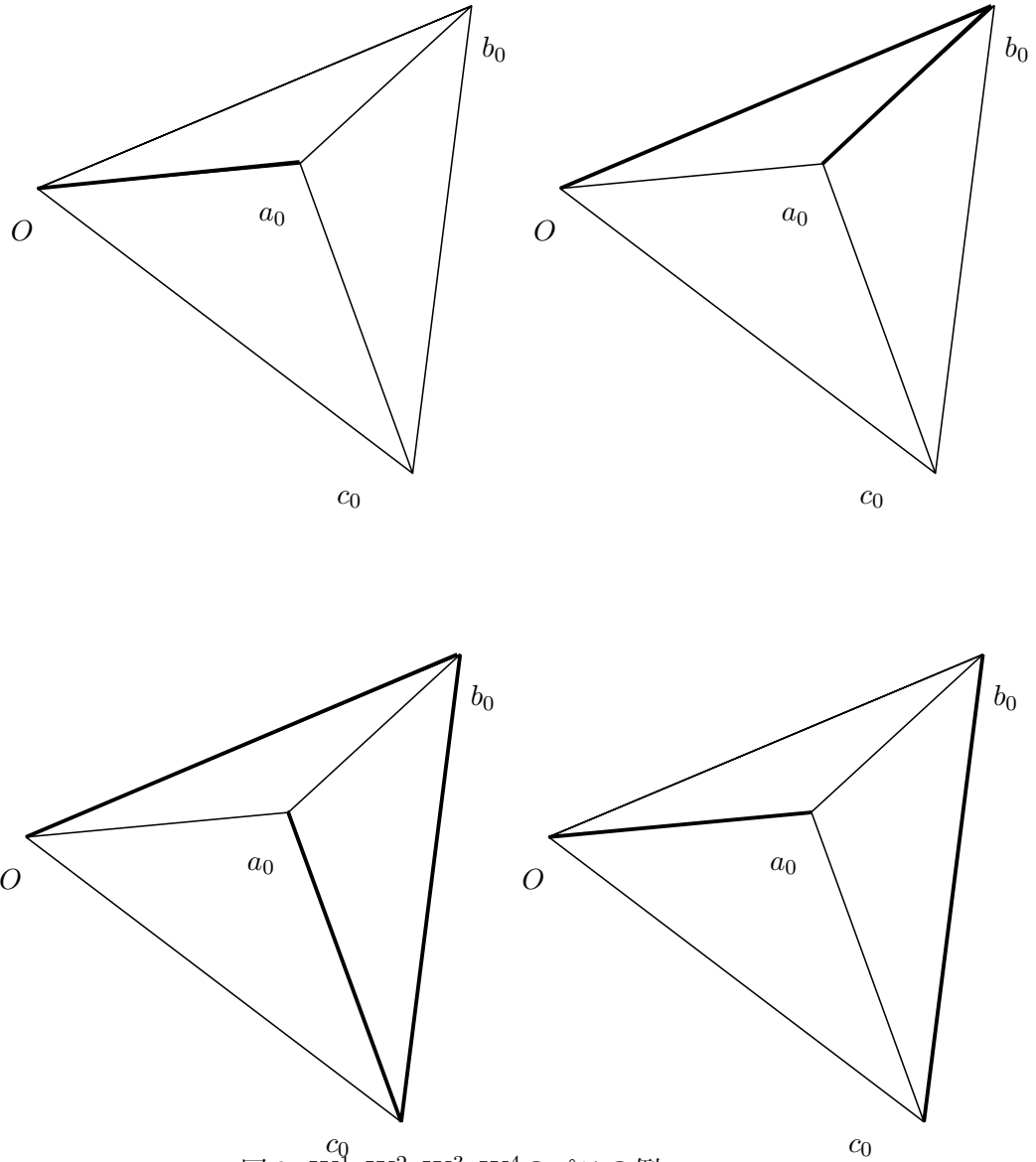


図 2  $W_0^1, W_0^2, W_0^3, W_0^4$  のパスの例

**定義 2.7** (粗視化).  $w \in W, M \in \mathbb{Z}_+$  に対して,  $Q_M$  を

$$(Q_M(w))(i) = w(T_i^M(w)), i = 0, 1, 2, \dots, m$$

( $m$  は  $T_{m+1}^M(w) = \infty$  となる最小の整数) と定義する. ここで,  $\{T_i^M(w)\}_{i=0}^m$  は式 (1) で定義した  $G_M$  の到達時刻の列である.

$$Q_M w = [w(T_0^M(w)), w(T_1^M(w)), \dots, w(T_m^M(w))]$$

は  $F_M$  上のパスである.

ループについて定義する.

**定義 2.8** (ループ). パス  $w \in W$  が同じ点を通るとき, ループをもつと定義する. より正確には, 点  $c = w(i) \in G_0$  に対して,  $w(i) = w(j)$  となる  $i, j \in \mathbb{Z}_+ (i < j)$  が存在するとき,  $w$  の時刻  $i$  から時刻  $j$  までの部分を  $\mathbf{c}$  におけるループとよぶ. 各ループは他の点における, より大きいループの一部をなすこともある. また, ループ  $\{w(i), w(i+1), \dots, w(j)\}$  の直径  $d$  を,  $d = \max_{i \leq i_1 < i_2 \leq j} |w(i_1) - w(i_2)|$  で定義する.

**定義 2.9** (脱出時刻とスケルトン).  $\mathcal{T}_M$  を, 各頂点が  $G_M$  の要素で各辺が  $E_M$  の要素となる閉三角錐で上向きなものの全体の集合とする ( $M \in \mathbb{Z}_+$ ).  $\{T_i^M(w)\}_{i=0}^m$  を式 (1) で定義した到達時刻の列とする.  $w \in W$  に対して  $w$  が通り抜ける  $2^M -$  三角錐の列  $(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  と, それらからの脱出時刻の列  $\{T_i^{ex,M}(w)\}_{i=0}^k$  を次のように定める.

$i = 0$  のとき,  $T_0^{ex,M}(w) = T_0^M(w)$ ,  $\Delta_1$  を  $\Delta \in \mathcal{T}_M$  で  $w(T_0^M)$  と  $w(T_1^M)$  を含むものとする. (ゆえに,  $w \in W^*$  なら  $T_0^{ex,M}(w) = 0$ )

次に  $i \geq 0$  に対しては  $J(i) = \inf \{j \geq 0; j < m, T_j^M(w) > T_{i-1}^{ex,M}(w), w(T_{j+1}^M(w)) \notin \Delta_i\}$  とする. ただし,  $\inf \emptyset = \infty, k = \min \{i \geq 1 : J(i) = \infty\}$  とおく.

$i = 1, 2, \dots, k-1$  に対して,  $T_i^{ex,M}(w) = T_{J(i)}^M(w)$  とし,  $\Delta_{i+1}$  を  $\Delta \in \mathcal{T}_M$  で,  $w(T_i^{ex,M}), w(T_{J(i)+1}^M)$  を含むものとする.

$i = k$  のとき,  $T_k^{ex,M}(w) = T_m^M(w)$  と定義する.

このようにして定めた  $\sigma_M(w) = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  をパス  $w$  の  $2^M -$  スケルトンとよび,  $T_i^{ex,M}(w)$  をスケルトンの  $i$  番目の要素 (三角錐) からの脱出時刻という. また  $w = (w_1, w_2) \in W_N^4$  のときは,  $w_1, w_2$  それぞれに対してスケルトンおよび脱出時刻を決める ( $N \geq M$ ).

**定義 2.10** (スケルトンによるパスの分割).  $w \in \bigcup_{k=1}^4 W_N^k$ ,  $N \geq M$ ,  $\sigma_M(w) = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  とする. このとき, 各  $\Delta_i \in \sigma_M(w)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) に対してその分割を次のように定める.

$$w|_{\Delta_i} = [w(n), T_{i-1}^{ex,M}(w) \leq n \leq T_i^{ex,M}(w)]$$

必要なら, 平行移動, 回転,  $2^{N-M}$  スケール変換により,  $Q_M w(T_{i-1}^{ex,M}(w))$  を  $O$ ,  $Q_M w(T_i^{ex,M}(w))$  を  $a_{N-M}$  と対応させて  $w|_{\Delta_i}$  を  $\bigcup_{k=1}^4 W_{N-M}^k$  の要素と同一視する. このような分割は一意に定まる. 簡単のため, 同一視された  $\bigcup_{k=1}^4 W_{N-M}^k$  のパスに対して同じ記号で表す.

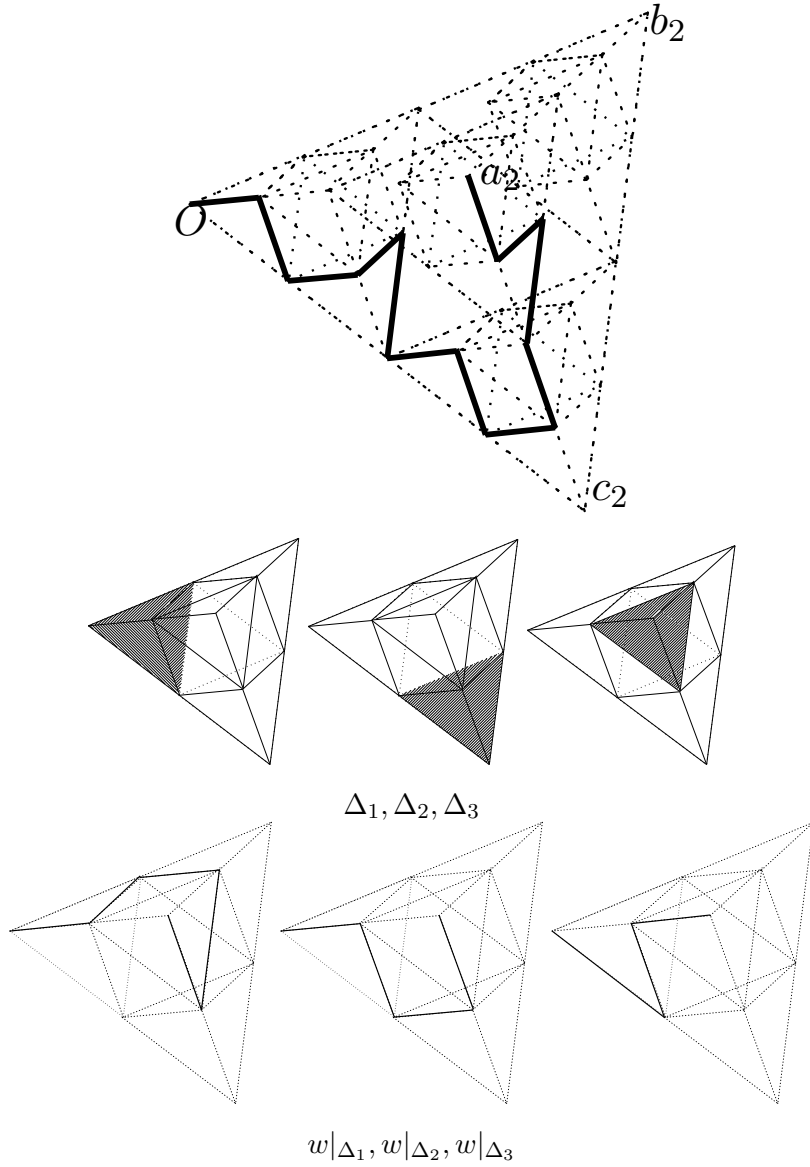




図3 スケルトン $\sigma_1(w)$ と分割されたパス(相似変換後)の例

次に、ループを消去する操作を定義する。ループの消し方は、ループができた順に消す方法と、大きいループから順番に消す方法が考えられる。2次元シェルピンスキー・ガスケットでは、どちらの方法でループを消去しても分布が等しいことが証明されている([2] 参照)が、一般には分布は等しくならない。この論文では、2次元で用いられた大きい順に消す方法をもとに、3次元シェルピンスキー・ガスケットに適用できるループ消しの方法を考案する。2次元と3次元のシェルピンスキー・ガスケットの構造の違いから必ずしも大きい順に消されるわけではないが、生成関数を用いて、解析可能になる。

**定義 2.11** (ループ消去 1.1( $k = 1, 2, 3$  のとき)).  $w \in \bigcup_{k=1}^3 W_1^k$  のループ消去を定義する。まず,  $\{s_i\}_{i=0}^n$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ s_i &= \sup \{j : w(j) = w(s_{i-1} + 1)\}, i \geq 1, \end{aligned}$$

次にループ消去を定義する。 $w$  からループ  $\{w(s_{j-1}+1), w(s_{j-1}+2), \dots, w(s_j-1)\}$  を消去したものを  $Lw'$  とおく ( $s_j > s_{j-1} + 1, j = 1, 2, \dots, n$  のときにループが存在する)。つまり,

$$Lw' = [w(s_0), \dots, w(s_n)].$$

ここで,  $w(s_n) = a_1$ .

**定義 2.12** (ループ消去 1.2( $k = 4$  のとき)). 補助的に導入した  $W_1^4$  に属するパスの組  $w = (w_1, w_2)$  に対しても, ループ消去を定義する。 $F_0$  と三角錐  $Oa_1b_1c_1$  の共通部分上の, それぞれ  $O$  から  $a_1$  まで,  $b_1$  から  $c_1$  までの, ループをもたず, かつ互いに交わらないパスの組で置き換える。条件を満たすパスの組の集合を  $W_1^{*4}$  とする。

$$W_1^{*4} = \{v = (v_1, v_2) \in W_1^4 : v_1, v_2 \text{ はループをもたず, 互いに交わらない}\}.$$

$W_1^{*4}$  は 285 個の要素をもつ。この段階では置き換えうるパスの組は一意に定めず, 第3章でランダムウォークを導入したあとで, 置き換えるパス

の組に適切な分布を導入する．この章では  $w = (w_1, w_2) \in W_1^4$  に対して  $Lw$  は可能な置き換えの一つとする．

以上の操作で,  $w \in \bigcup_{k=1}^4 W_1^4$  に対してはループ消去が定義された． $w \in \bigcup_{k=1}^4 W_N^4$  に関しても, 帰納的に定義する．

**定義 2.13** (ループ消去 2).  $w \in \bigcup_{k=1}^4 W_N^4$  とする．

$$\begin{aligned} w' = Q_{N-1}w &= [w(T_0^{N-1}(w)), w(T_1^{N-1}(w)), \dots, w(T_k^{N-1}(w))], \\ w(T_k^{N-1}) &= a_N \end{aligned}$$

と定義する (このとき,  $2^{-(N-1)}w' \in \bigcup_{k=1}^4 W_1^4$  となる)．

また,  $\{s_i\}_{i=0}^n$  を次のように定義する．

$$\begin{aligned} s_0 &= \sup \{j : w(T_j^{N-1}) = 0\}, \\ s_i &= \sup \{j : w(T_j^{N-1}) = w(T_{s_{i-1}+1}^{N-1})\}, \quad i \geq 1, \end{aligned}$$

次に, ループ消去  $L$  と  $L_{N-1}$  を定義する．

$Lw' = [w(T_{s_0}^{N-1}), \dots, w(T_{s_n}^{N-1})]$  とする． $(2^{-(N-1)}Lw' \in \bigcup_{k=1}^3 \hat{W}_1^k$  となる) ここで,  $w(T_{s_n}^{N-1}) = a_N$ ．

$L_{N-1}w = [w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, a_N]$  とする．(ここで,  $w_i$  は,  $w_i = [w(T_{s_i}^{N-1}), w(T_{s_i}^{N-1} + 1), \dots, w(T_{s_{i+1}}^{N-1} - 1)]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ .)

以上の操作をまとめると, まず粗視化したパス  $Q_{N-1}w$  からループを消す．この部分は  $\bigcup_{k=1}^4 W_1^k$  のパスからループを消す方法と同じである．その結果残ったパスの部分に細かい構造を戻す．これで, 直径が  $2^{N-1}$  以上の  $G_{N-1}$  に属する点におけるループはすべて消されたことになる． $G_{N-1}$  以外の点での  $2^{N-1}$  以上のループは消されていないかもしれない．これが 3 次元の困難点である．

**定義 2.14** (ループ消去 3).  $N \geq M$  とする．

(L1) まず,

$$Q_{M-1}w'|_{\Delta_i} = [w'(T_k^{M-1}), w'(T_{k+1}^{M-1}), \dots, w'(T_{k+k_0}^{M-1})]$$

とする．ここで,  $w'(T_k^{M-1})$  は上向き三角錐  $\Delta$  の最初の点で,  $w'(T_{k+k_0}^{M-1})$  は上向き三角錐の脱出点である．

(L2) また、 $\{s_i\}_{i=0}^n$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} s_0 &= \sup \{j; w'(T_j^{M-1}) = w'(T_k^{M-1})\}, \\ s_i &= \sup \{j; w'(T_j^{M-1}) = w'(T_{s_{i-1}+1}^{M-1})\}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

このとき

$$L(Q_{M-1}w'|\Delta) = [w'(T_{s_0}^{M-1}), w'(T_{s_1}^{M-1}), \dots, w'(T_{s_n}^{M-1})].$$

(ここで、 $w'(T_{s_0}^{M-1}) = w'(T_k^{M-1}), w'(T_{s_n}^{M-1}) = w'(T_{k+k_0}^{M-1})$ ) ここで定義 2.10 で述べたように  $w_\Delta$ を $\bigcup_{k=1}^4 W_0^k$  のパスと同一視していることに注意.

(L3) 次に

$$L_{M-1}(w|\Delta) = [w'_0, w'_1, \dots, w'_{n-1}, w'(T_{s_n}^{M-1})]$$

とする. ここで,

$$w'_i = [w'(T_{s_i}^{M-1}), w'(T_{s_{i+1}}^{M-1}), \dots, w'(T_{s_{i+1}}^{M-1} - 1)], i = 0, 1, \dots, n-1.$$

(L4) すべての  $\Delta \in \sigma_M(w')$  に対して,  $L_{M-1}(w|\Delta)$  を連結し  $w'' = L_{M-1}w$  をつくる.

次に, すべての  $\Delta \in \sigma_M(w')$  に対して, (L2) で得た  $L(Q_{M-1}w'|\Delta)$  を連結して,  $\hat{Q}_{M-1}w$  をつくる. このとき,  $\hat{Q}_{M-1}w$  は,  $Q_{M-1}(\hat{Q}_{M-1}w) = \hat{Q}_{M-1}w$  が成り立つ.  $O$  から  $a_N$  へいく  $F_{M-1}$  上のパスである.

$\hat{Q}_{M-1}w = Q_{M-1}w''$  をみる.

すべてのループが消去され,  $Lw = L_0w = \hat{Q}_0w$  が成り立つまでこの操作を続ける. 必ずしも大きい順とは限らないが, 最後まで繰り返し操作を行うとループはすべて消える. ループ消去を行う間, 任意の  $w \in W'_N$  に対して

$$\sigma_K(\hat{Q}_Mw) = \sigma_K(\hat{Q}_Kw)$$

がすべての  $M \leq K \leq N$  で成り立ち, 特に,

$$\sigma_K(Lw) = \sigma_K(\hat{Q}_Kw), K \leq N$$

が成り立つ.

**定義 2.15** (スケルトンの要素のタイプ).  $w \in \bigcup_{k=1}^4 \hat{W}_N^k, N \geq M, \sigma_M(w) = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  とすると  $i = 1, 2, \dots, k$  で, ある  $n(i)$  が存在して  $T_{i-1}^{ex,M}(w) = T_{n(i)}^M(w)$  が成り立つ. このとき,  $\Delta_i$  が次の条件を満たすとき,  $\Delta_i$  のタイプを定義する.

$$\begin{aligned} T_i^{ex,M}(w) &= T_{n(i)+1}^M = \sup \{j : T_j^M \in \Delta_i\} \text{ なら, タイプ 1} \\ T_i^{ex,M}(w) &= T_{n(i)+2}^M \text{ なら, タイプ 2} \\ T_i^{ex,M}(w) &= T_{n(i)+3}^M \text{ なら, タイプ 3} \\ T_i^{ex,M}(w) &= T_{n(i)+1}^M \neq \sup \{j : T_j^M \in \Delta_i\} \text{ なら, タイプ 4} \end{aligned}$$

タイプ 4 のときに 2 回目に通る  $\Delta_i$  をタイプ 5 とする.

タイプ 5 を  $\phi$  として,  $\sigma'_M(w) = \sigma_M(w) \setminus \phi$  と, タイプ 1 からタイプ 4 までの要素をもつ  $\sigma'_M(w)$  を定義し,  $\sigma'_M(w)$  をパス  $w$  の 4 タイプ  $2^M -$  スケルトンと呼ぶ. (タイプ 5 を  $\phi$  とせず, タイプ 1 からタイプ 5 までの要素をもつ  $\sigma_M(w)$  は, 5 タイプスケルトンと呼ぶことにする)

### 3 確率測度と生成関数

この章では, ループ・イレースド・ランダムウォークの確率測度を定義する. 次に, ループ・イレースド・ランダムウォークの歩数の生成関数を定義し, 生成関数の再帰式の命題を証明する.

**定義 3.1** (ランダムウォークの種類と確率測度).  $O$  を出発点とし,  $a_N$  を初めて訪れたときに止まる 3 種類のランダムウォークを考える.

(1)  $W_N^1$  上の測度  $P_{N,1}$  を,  $w \in W_N^1$  に対して

$$P_{N,1}[w] = \left(\frac{1}{6}\right)^{l(w)-1},$$

と定義する. これは  $O$  を出発して  $b_N, c_N, a'_N, b'_N, c'_N$  を通らずに  $a_N$  を訪れてそこで止まるランダムウォークにあたる.

(2)  $W_N^2$  上の測度  $P_{N,2}$  を,  $w \in W_N^2$  に対して

$$P_{N,2}[w] = \left(\frac{1}{6}\right)^{l(w)-2},$$

と定義する．これは  $O$  を出発して  $c_N, a'_N, b'_N, c'_N$  を通らずに  $b_N, a_N$  の順に訪れて  $a_N$  で止まるランダムウォークにあたる．

(3)  $W_N^3$  上の測度  $P_{N,3}$  を,  $w \in W_N^3$  に対して

$$P_{N,3}[w] = \left(\frac{1}{6}\right)^{l(w)-3},$$

と定義する．これは  $O$  を出発して  $a'_N, b'_N, c'_N$  を通らずに  $b_N, c_N, a_N$  の順に訪れて  $a_N$  で止まるランダムウォークにあたる．

また, 2 本の独立なランダムウォークの組を用いて次を定義する．

(4)  $W_N^4$  上の測度  $P_{N,4}$  を,  $w = (w_1, w_2) \in W_N^4 \subset W^* \times W$  に対して

$$P_{N,4}[w] = P_{N,1}[w_1] \times P'_{N,1}[w_2] = \left(\frac{1}{6}\right)^{l(w_1)-1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{l(w_2)-1},$$

と定義する．ここで,  $P'_{N,1}$  は  $b_N$  を出発して  $O, a_N, c_N, a'_N, b'_N, c'_N$  を通らずに  $c_N$  を訪れてそこで止まるランダムウォーク  $w_2$  の確率を表す．

ここでは, ランダムウォークは  $O$  出発で, 有限長なパスは  $W^*$  の要素と考える．よって,  $T_i^N$  や  $Q_N$  も定義される．

**定義 3.2** (ループ・イレースド・ランダムウォーク)．単純ランダムウォークから, ループを消して得られるランダムウォークを, ループ・イレースド・ランダムウォークとよぶ．ループを消去した後は, 自己回避になっている．

まず,  $N = 1$  のときのループ・イレースド・ランダムウォークを定義する．

**定義 3.3** (ループ消去後の確率 1)． $k = 1, 2, 3$  に対して, ループ・イレースド・ランダムウォークを次のように定義する． $w \in \hat{W}_{1,k}$  に対して

$$\hat{P}_{1,k}[w] = P_{1,k} \circ L^{-1}[w].$$

ここで,  $\hat{W}_N^k (= W_N^k \cap \Gamma)$  は自己回避なパスの空間を表す．(式 (2))

**定義 3.4** (ループ消去後の確率 2)． $k = 4$  に対してはループ・イレースド・ランダムウォークを次のように定義する． $v = (v_1, v_2) \in W_1^{*4}$  に対して,

$\hat{P}_{1,4}[v]$  を定義する．まず, 「 $v_1$  と交わらない」という条件をつけた  $b_N$  を出発点として  $c_N$  を初めて訪れたときに止まるランダムウォークを  $Z_{v_1}$  と表す． $Z_{v_1}$  から,  $P_{1,1}$  のランダムウォークと同様にしてループを消去したランダムウォークを  $LZ_{v_1}$  と表す．

$$\hat{P}_{1,4}[v] = \hat{P}_{1,1}[v_1] \times P'_{1,1}[LZ_{v_1} = v_2],$$

と定義する．

**定義 3.5** (ループ消去後の確率 3).  $\{\hat{P}_{N,k}\}$  を以下のように帰納的に定める． $k = 1$  のとき,  $\hat{P}_{M,1}, M = 1, 2, \dots, N$  が定義されたとする．このとき  $v \in \hat{W}_{N+1}^1$  に対して,  $v$  の  $2^N$  - スケルトンによる分解を  $\sigma'_N(v) = (\Delta_1, \dots, \Delta_j)$  ( $\Delta_i \in \mathcal{T}_N$ ),  $w_i = w|_{\Delta_i}$  とする ( $w_i$  は定義 2.10 と同じもの)．このとき,  $\hat{P}_{N+1,1}[v]$  を以下のように定める．

$$\hat{P}_{N+1,1}[v] = \sum_u \hat{P}_{N,1}[u] \left( \prod_{i=1}^j \hat{P}_{1,*}[w_i] \right) \quad (3)$$

ここで,  $\sum_u$  は  $\sigma'_N(u) = \sigma'_N(v)$  を満たす  $u \in \hat{W}_N^1$  についてとった和であり,  $\hat{P}_{1,*}$  は  $\Delta_i \in \sigma'_N(u)$  がタイプ  $m$  のとき  $\hat{P}_{1,*}[w_i] = \hat{P}_{1,m}[w_i]$  と定義する． $k = 2, 3, 4$  のときも同様に定義する．

次に, ループ・イレーズド・ランダムウォークの歩数の生成関数を定義する．

**定義 3.6** (生成関数).  $w \in \bigcup_{k=1}^4 \hat{W}_N^k$  に対し, タイプ 1 からタイプ 4 の  $\sigma'_0(w)$  の要素の個数を, それぞれ  $s_1(w), s_2(w), s_3(w), s_4(w)$  とする．このとき,

$$l(w) = s_1(w) + 2s_2(w) + 3s_3(w) + 2s_4(w). \quad (4)$$

また,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_k \geq 0, k = 1, 2, 3, 4$ , とする．

生成関数の列  $\{\Phi_{N,k}(\vec{x})\}_{N=1}^\infty$  を次のように定める．( $k = 1, 2, 3, 4$ .)

$$\Phi_{N,k}(\vec{x}) = \sum_{w \in \hat{W}_N^k} \hat{P}_{N,k}[w] x_1^{s_1(w)} x_2^{s_2(w)} x_3^{s_3(w)} x_4^{s_4(w)}, \quad x_k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

また, 簡単のため  $N = 1$  のときは,  $\Phi_{1,k}(\vec{x}) = \Phi_k(\vec{x})$  とおく．

**定理 3.7** (生成関数の再帰式). 生成関数  $\{\Phi_{N,k}(\vec{x})\}_{N=1}^{\infty}$  はすべての  $N \in \mathbb{N}$  で次の再帰式を満たす.

$$\Phi_{N+1,k}(\vec{x}) = \Phi_{N,k}(\Phi_1(\vec{x}), \Phi_2(\vec{x}), \Phi_3(\vec{x}), \Phi_4(\vec{x})), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

*Proof.*  $\Phi_{N,1}(\vec{x})$  についてのみ証明する.  $\hat{W}_1^*$  をタイプ  $m$  のパスなら  $\hat{W}_1^m$  とすると,

$$\begin{aligned} \Phi_{N+1,1}(\vec{x}) &= \sum_{w \in \hat{W}_{N+1}^1} \hat{P}_{N+1,1}[w] x_1^{s_1(w)} x_2^{s_2(w)} x_3^{s_3(w)} x_4^{s_4(w)} \\ &= \sum_{u \in \hat{W}_N^1} \sum_{w_1 \in \hat{W}_1^*} \cdots \sum_{w_k \in \hat{W}_1^*} \left( \prod_{i=1}^k \hat{P}_{1,*}[w_i] \right) \hat{P}_{N,1}[u] \prod_{j=1}^4 x_j^{s_j(w_1) + \cdots + s_j(w_k)} \\ &= \sum_{u \in \hat{W}_N^1} \hat{P}_{N,1}[u] \prod_{i=1}^k \left( \sum_{w_i \in \hat{W}_1^*} \hat{P}_{1,*}[w_i] \prod_{j=1}^4 x_j^{s_j(w_i)} \right) \quad (\text{定義 3.5 より}) \\ &= \sum_{u \in \hat{W}_N^1} \hat{P}_{N,1}[u] \prod_{j=1}^4 \Phi_j(\vec{x})^{s_j(u)} \\ &= \Phi_{N,1}(\Phi_1(\vec{x}), \Phi_2(\vec{x}), \Phi_3(\vec{x}), \Phi_4(\vec{x})). \end{aligned}$$

$\Phi_{N,2}, \Phi_{N,3}, \Phi_{N,4}$  に関しても同様に示せる.

□

**定義 3.8** (平均値行列).  $\Phi_k(\vec{x})$  の平均値行列  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  を  $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$  での  $\Phi_k(\vec{x})$  のヤコビ行列として定める. ( $k = 1, 2, 3, 4$ .)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_1(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi_1(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi_1(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_4} \Phi_1(1, 1, 1, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_2(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi_2(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi_2(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_4} \Phi_2(1, 1, 1, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_3(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi_3(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi_3(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_4} \Phi_3(1, 1, 1, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_4(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi_4(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi_4(1, 1, 1, 1) & \frac{\partial}{\partial x_4} \Phi_4(1, 1, 1, 1) \end{pmatrix}$$

ここで,  $(1, 1, 1, 1)$  は写像  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (\Phi_1(\vec{x}), \Phi_2(\vec{x}), \Phi_3(\vec{x}), \Phi_4(\vec{x}))$  の  $\mathbf{R}_+^4$  での固定点である.

また, 平均値行列  $\mathbf{M}$  は各成分が正なので, フロベニウスの定理より最大固有値が存在する.  $\mathbf{M}$  の最大固有値を  $\lambda$  とおく ( $2 < \lambda < 4$ ).

## 4 ループ・イレースド・ランダムウォークの連続極限の存在

この章では, まず 3 次元シェルピンスキー・ガasket を定義し, ループ・イレースド・ランダムウォークの連続極限の存在を示す. 証明は, 2 次元シェルピンスキー・ガasket の場合を参考にした. ([2], [3])

### 4.1 3 次元シェルピンスキー・ガasket 上のパス空間

まず, フラクタルである 3 次元シェルピンスキー・ガasket を定義する.

**定義 4.1** (3 次元シェルピンスキー・ガasket). プレ・シェルピンスキー・ガasket  $F_0$  に対して,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, F^N (N \in \mathbb{Z})$  を 次のように定める.  $\Delta_1$  を  $T_0$  の要素の閉三角錐とし, 頂点は  $O, a_0, b_0, c_0$  とする.  $\Delta_2$  を  $yz$  平面に関して  $\Delta_1$  を折り返した閉三角錐とする ( $O$  で接する).  $\Delta_3$  を  $\Delta_1$  と  $b_0$  で接する  $\Delta_1$  と合同かつ同じ向きな閉三角錐とする.  $\Delta_4$  を  $\Delta_1$  と  $c_0$  で接する  $\Delta_1$  と合同かつ同じ向きな閉三角錐とする.  $F^N$  を,  $F^N = 2^{-N} F_0 \cap (\cup_{k=1}^4 \Delta_k)$  と定める. また, 3 次元シェルピンスキー・ガasket  $F$  を  $F = cl(\cup_{N=0}^{\infty} F^N)$  で定める ( $cl(A)$  は  $A$  の閉包を表す).  $F$  上の点の集合を  $G^N = 2^{-N} G_0 \cap (\cup_{k=1}^4 \Delta_k)$  と定める.

前章までと異なり連続な空間であるため, パスや到達時刻も連続なものを扱う.

**定義 4.2** (3 次元シェルピンスキー・ガasket 上の連続なパス). 出発点  $O$  から  $a_0$  に着く, 3 次元シェルピンスキー・ガasket 上の連続なパスの集合を  $C$  とおく. つまり,

$$C = \{w \in C([0, \infty) \rightarrow F) : w(0) = O, \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = a_0\}.$$

$C$  は距離  $d(u, v) = \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t) - v(t)|, (u, v \in C)$  に関して完備可分距離空間を成す. ただし,  $|x - y|, x, y \in \mathbb{R}^3$  はユークリッド距離である.

$$W^N = 2^{-N} W_N^1 = \{2^{-N} w : w \in W_N^1\}, \hat{W}^N = 2^{-N} \hat{W}_N^1 \text{ とおく.}$$



**定義 4.3** (パスの線形内挿).  $w \in \bigcup_{N=1}^{\infty} W_N^1, N \in \mathbb{Z}_+$  に対して, 線形内挿を以下のように定める.

$$w(t) = \begin{cases} a_N, & (t \geq l(w)) \\ (i+1-t)w(i) + (t-i)w(i+1), & (i \leq t < i+1) \end{cases}$$

これにより,  $w$  を  $[0, \infty)$  上の連続関数 (つまり  $C$  の要素) とみなせる. 以後, すべてのパスは線形内挿されたものであるとする. このようにして,  $W^N, \hat{W}^N$  は  $C$  の部分集合とみなせる.  $w \in W^N$  に対して,  $\tilde{l}(w) = l(2^N w)$  とおく. すなわち,  $\tilde{l}(w)$  はパス  $w$  が  $a_0$  に着くまでの  $2^{-N}$  サイズの「歩数」である.

到達時刻, 粗視化, 脱出時刻, スケルトンも  $C$  上で定義する.

**定義 4.4** (到達時刻).  $w \in C$  に対して,  $G^M$  への到達時刻の列  $\{T_i^M(w)\}_{i=0}^m$  を次のように定める.

$$T_i^M(w) = \begin{cases} 0, & (i = 0) \\ \inf \{j > T_{i-1}^M(w) : w(j) \in G^M \setminus \{w(T_{i-1}^M(w))\}\}, & (i \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

ただし,  $\inf = \phi, m = \inf \{j \geq 0; T_{j+1}^M(w) = \infty\}$  とする. 簡単のため,  $W_N$  の到達時刻と同じ記号を用いている.

**定義 4.5** (粗視化写像).  $N \in \mathbb{Z}_+$  に対して, 粗視化写像  $Q^N : C \rightarrow C$  を以下のように定める.

$$(Q^N w)(i) = w(T_i^N(w)), i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$(Q^N w)(t) = \begin{cases} (i+1-t)(Q^N w)(i) + (t-i)(Q^N w)(i+1), & (i \leq t < i+1), \\ a_0, & (t \geq m). \end{cases}$$

$$(i = 0, 1, \dots, m-1.)$$

$w \in C$  に対して到達時刻を定めたので,  $2^{-M}$ -スケルトン,  $\sigma^M(w)$  ( $w$  が通る,  $2^{-M}$  三角錐の列), 脱出時刻の列  $\{T_i^{ex,M}\}_{i=0}^k$  も同じように定義できる. また,  $\sigma'^M(w) = \sigma^M(w) \setminus \phi$  とする.  $\sigma'^M(w)$  はタイプ 1 からタイプ 4 までの三角錐の列 (4 タイプスケルトン) である.

**定義 4.6** (ループ消去).  $w \in W^N$  とすると,  $2^N w \in W_N, L(2^N w) \in \hat{W}_N$  となる. ループ消去操作  $\tilde{L} : \bigcup_{N=0}^{\infty} W^N \rightarrow \bigcup_{N=0}^{\infty} \hat{W}^N$  を以下のように定める.

$$\tilde{L}w = 2^{-N} L(2^N w) \in \hat{W}^N, (w \in W^N, N \in \mathbb{Z}_+).$$

また,  $\hat{Q}^M$  を

$$\hat{Q}^M w = 2^{-N} \hat{Q}_M(2^N w) \in \hat{W}^M, (M \leq N)$$

と定める.

**定義 4.7.** 各  $N \in \mathbb{Z}_+$  に対し,  $W^N$  上の確率測度  $P^N$  を次のように定める.

$$P^N[w] = P_{N,1}[2^N w], (w \in W^N).$$

## 4.2 連続極限

$N \in \mathbb{Z}_+$  とする.  $G^N$  上のランダムウォークを,  $O$  を出発点とし  $a_0$  で止まるものとみなす.

**定義 4.8** (パスの族の空間). パスの族の空間  $\Omega'$  を次のように定める.

$$\Omega' = \{\omega = (w_0, w_1, \dots) : w_N \in \hat{W}^N, w_N \triangleright w_{N+1}, N \in \mathbb{Z}_+\}.$$

ここで,  $w_N \triangleright w_{N+1}$  は,  $Q^N v = w_N$  かつ  $\hat{Q}^{N+1} v = w_{N+1}$  を満たす  $v \in W^{N+1}$  が存在することを表す (つまり,  $\sigma'^N(w_N) = \sigma'^{N+1}(w_{N+1})$  と同値である).

**定義 4.9** (像空間の確率測度).  $\omega \in \Omega'$  に対して, 最初の  $N + 1$  個の要素を対応させる射影を  $\pi_N$  とする. すなわち,  $\pi_N \omega = (w_0, w_1, \dots, w_N)$ . また, 像空間  $\pi_N \Omega'$  上の確率測度  $\hat{P}^N$  を次のように定める.

$$\hat{P}^N[(w_0, w_1, \dots, w_N)] = P^N[v : \hat{Q}^i v = w_i]$$

このように定義された確率測度の列  $\{\hat{P}^N\}_{N=0}^\infty$  は, 次の整合条件を満たす.

$$\hat{P}^N[(w_0, w_1, \dots, w_N)] = \sum_u \hat{P}^{N+1}[(w_0, w_1, \dots, w_N, u)].$$

ここで,  $\sum_u$  は  $\sum_{u \in \hat{W}_{N+1}^1; w_N \triangleright u}$  を表す.

よって, コルモゴロフの拡張定理を適用することができて, 次の定理がいえ.

**定理 4.10** ( $\Omega_0$  上の確率測度).  $\Omega_0 = C^\mathbb{N} (= C \times C \times \dots)$  上の確率測度  $\hat{P}$  が存在し,

$$\hat{P}[\Omega'] = 1, \hat{P} \circ \pi_N^{-1} = \hat{P}^N, (N \in \mathbb{Z}_+)$$

**定義 4.11** (第  $N + 1$  成分 への射影).  $Y^N : \Omega_0 \rightarrow C$  を  $\omega$  の第  $N + 1$  成分への射影とする. このとき,  $Y^N$  は  $(\Omega_0, \mathcal{B}, \hat{P})$  上の  $F$ -値過程  $Y^N(\omega, t)$  とみなせる. ここで,  $\mathcal{B}$  は筒集合によって生成される  $\Omega_0$  上のボレル  $\sigma$ -加法族とする.

**定義 4.12** (タイプ 1 からタイプ 4 の  $2^{-M}$ -三角錐の個数).  $w \in \hat{W}^N, j = 1, 2, 3, 4, \sigma'^M(w) = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  に対して,  $S_j^M(w)$  で  $\sigma'^M(w)$  内のタイプ  $j$  の  $2^{-M}$ -三角錐の個数を表す. すなわち,

$$S_j^M(w) = \#\{i : \text{タイプ } j \text{ の } \Delta_i\}.$$

また,

$$\mathbf{S}^M(w) = (S_1^M(w), S_2^M(w), S_3^M(w), S_4^M(w))$$

とおく. このとき,

$$\tilde{l}(w) = S_1^N(w) + 2S_2^N(w) + 3S_3^N(w) + 2S_4^N(w)$$

が成り立つ.

**定義 4.13** (同分布な確率変数).  $\mathbf{S}_1 = (S_{1,1}, S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4})$ ,  $\mathbf{S}_2 = (S_{2,1}, S_{2,2}, S_{2,3}, S_{2,4})$ ,  $\mathbf{S}_3 = (S_{3,1}, S_{3,2}, S_{3,3}, S_{3,4})$ ,  $\mathbf{S}_4 = (S_{4,1}, S_{4,2}, S_{4,3}, S_{4,4})$  を  $(\Omega_0, \mathcal{B}, \hat{P})$  上の  $\mathbb{Z}_+$ -値過程で, それぞれ  $\hat{P}_{1,1}, \hat{P}_{1,2}, \hat{P}_{1,3}, \hat{P}_{1,4}$  の下での  $\mathbf{S}^1$  と同分布な確率変数とする. すなわち,  $\mathbf{S}_j, j = 1, 2, 3, 4$ , は任意の  $x_j \in \mathbb{Z}_+$  に対して,

$$\begin{aligned}\hat{P}[\mathbf{S}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)] &= \hat{P}_{1,1}[\mathbf{S}^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)], \\ \hat{P}[\mathbf{S}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)] &= \hat{P}_{1,2}[\mathbf{S}^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)], \\ \hat{P}[\mathbf{S}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)] &= \hat{P}_{1,3}[\mathbf{S}^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)], \\ \hat{P}[\mathbf{S}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)] &= \hat{P}_{1,4}[\mathbf{S}^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)],\end{aligned}$$

を満たすとする.

**命題 4.14** (分枝過程).  $v \in \hat{W}^M$  を任意に固定し, 4 タイプスケルトン  $\sigma'^M(v) = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  とおく. 各  $1 \leq i \leq k$  に対して, 条件付き確率  $\hat{P}[\cdot | Y^M = v]$  の下で  $\{\mathbf{S}^{M+N}(Y^{M+N} | \Delta_i), N = 0, 1, 2, \dots\}$  はタイプ数 4 の優臨界分枝過程であり, 各個体のタイプは三角錐のタイプに対応する. すなわち, タイプ  $j$  の三角錐から生まれる三角錐の子孫分布は  $\mathbf{S}_j$  の分布にそれぞれ等しい. ( $j = 1, 2, 3, 4$ .)  $N = 0$  のとき,

$$\mathbf{S}^M(Y^M | \Delta_i) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0), & (\Delta_i \text{ がタイプ 1 のとき}), \\ (0, 1, 0, 0), & (\Delta_i \text{ がタイプ 2 のとき}), \\ (0, 0, 1, 0), & (\Delta_i \text{ がタイプ 3 のとき}), \\ (0, 0, 0, 1), & (\Delta_i \text{ がタイプ 4 のとき}). \end{cases}$$

このとき, 次の (1), (2), (3), (4) が成り立つ.

(1) 子孫分布の生成関数  $g_j(\vec{x}), j = 1, 2, 3, 4, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  を

$$g_j(\vec{x}) = E[x_1^{S_{j,1}} x_2^{S_{j,2}} x_3^{S_{j,3}} x_4^{S_{j,4}}],$$

と定義すると,

$$g_j(\vec{x}) = \Phi_j(\vec{x}),$$

が成り立つ. ここで,  $E$  は  $\hat{P}$  の下での期待値である.

(2)  $\mathbf{M}$  を定義 3.8 の平均値行列とすると,

$$E[\mathbf{S}^{M+N}(Y^{M+N} | \Delta_i) | Y^M = v] = \mathbf{S}^M(v | \Delta_i) \mathbf{M}^N.$$

(3)

$$\hat{P}[S_{j,1} + S_{j,2} + S_{j,3} + S_{j,4} \geq 2] = 1, j = 1, 2, 3, 4.$$

(4)

$$E[S_{j,i} \log S_{j,i}] < \infty, i, j = 1, 2, 3, 4.$$

**定義 4.15** (時間のスケール変換).  $w \in C$  に対して, 時間のスケール変換  $U_N(\alpha) : C \rightarrow C, \alpha \in (0, \infty), N \in \mathbb{Z}_+$  を次のように定める.

$$(U_N(\alpha)w)(t) = w(\alpha^N t).$$

また, 定義 3.8 の平均値行列の最大固有値  $\lambda$  でスケールされた  $F$  - 値過程  $Y^N$  を  $X^N$  とする. すなわち,

$$X^N = U_N(\lambda)Y^N, N \in \mathbb{Z}_+.$$

**命題 4.16.** 時間をスケール変換しても, パスを通る 4 タイプスケルトンの要素の種類は変わらない. すなわち,

$$\sigma'^M(X^N) = \sigma'^M(X^M) = \sigma'^M(Y^M), M \leq N, a.s.$$

特に

$$X^N(T_i^{ex,M}(X^N)) = X^M(T_i^{ex,M}(X^M)) = Y^M(T_i^{ex,M}(Y^N)), M \leq N, a.s.$$

$\Delta_1 \in \sigma_M(w)$  がタイプ 4 のときは, 最初に  $\Delta_1$  を通るときの横断時間と 2 回目の横断時間の同時分布を調べたい. そのために, 9 種類のタイプの分枝過程を考える.

**定義 4.17.**  $w = (w_1, w_2) \in \hat{W}^N$  とする.  $2^{-M}$  - 三角錐の個数  $S_j^M$  に対して, ( $j = 1, 2, 3, 4, S_j^M$  はタイプ  $j$  の三角錐の個数)  $\tilde{s}_i^M, i = 1, 2, \dots, 9$  を以下で定める. (以下,  $M$  は省略する)

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_9(w) &= S_4(w) - S_4(w_1) - S_4(w_2), \\
\tilde{s}_1(w) &= S_1(w_1) - \tilde{s}_9(w), \\
\tilde{s}_2(w) &= S_2(w_1), \\
\tilde{s}_3(w) &= S_3(w_1), \\
\tilde{s}_4(w) &= S_4(w_1), \\
\tilde{s}_5(w) &= S_1(w_2) - \tilde{s}_9(w), \\
\tilde{s}_6(w) &= S_2(w_2), \\
\tilde{s}_7(w) &= S_3(w_2), \\
\tilde{s}_8(w) &= S_4(w_2).
\end{aligned}$$

ここでは、 $w_1$  と  $w_2$  を別々に見ている。このとき、

$$\begin{aligned}
\tilde{l}(w_1) &= \tilde{s}_1(w) + 2\tilde{s}_2(w) + 3\tilde{s}_3(w) + 2\tilde{s}_4(w) + \tilde{s}_9(w), \\
\tilde{l}(w_2) &= \tilde{s}_5(w) + 2\tilde{s}_6(w) + 3\tilde{s}_7(w) + 2\tilde{s}_8(w) + \tilde{s}_9(w), \\
\tilde{l}(w) &= \tilde{l}(w_1) + \tilde{l}(w_2).
\end{aligned}$$

となる。これより、 $\sigma'^M(X^N) = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  とおくと 脱出時刻の列  $\{T_j^{ex,M}\}_{j=0}^k$  に対して、

$$\begin{aligned}
T_j^{ex,M}(X^N) &= \lambda^{-N} \sum_{i=1}^j (\tilde{s}_1^N(X^N|\Delta_i) + 2\tilde{s}_2^N(X^N|\Delta_i) + 3\tilde{s}_3^N(X^N|\Delta_i) + \tilde{s}_4^N(X^N|\Delta_i) + \\
&\quad \tilde{s}_5^N(X^N|\Delta_i) + 2\tilde{s}_6^N(X^N|\Delta_i) + 3\tilde{s}_7^N(X^N|\Delta_i) + \tilde{s}_8^N(X^N|\Delta_i) + \\
&\quad 2\tilde{s}_9^N(X^N|\Delta_i)), 1 \leq j \leq k.
\end{aligned}$$

$\mathbf{u} = {}^t(u_1, u_2, u_3, u_4)$  と  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  をそれぞれ 平均値行列  $\mathbf{M}$  の  $\lambda$  についての正の右固有ベクトルと左固有ベクトルとする。ただし、 $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$  を満たす。

命題 4.14 と 優臨界分枝過程の極限定理から、次の命題がいえる。

**命題 4.18.**  $v \in \hat{W}^M$  を任意に固定し、 $\sigma'^M(v) = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  とおく。条件付き確率  $\hat{P}[\cdot | Y^M = v]$  の下、各  $1 \leq i \leq k$  で次が成り立つ。

(1) 各  $i \in \{1, \dots, k\}$  に対して,  $\{\lambda^{-(M+N)} \mathbf{S}^{M+N}(X^{M+N} | \Delta_i), N = 0, 1, 2, \dots\}$  は  $N \rightarrow \infty$  で, ある  $\mathbb{R}^4$ -値確率変数  $\mathbf{S}^{*M,i} = (S_1^{*M,i}, S_2^{*M,i}, S_3^{*M,i}, S_4^{*M,i})$  に概収束する.

(2)  $\{\mathbf{S}^{*M,i}, i = 1, \dots, k\}$  は独立確率変数列である.

(3) ある確率変数  $B_j, j = 1, 2, 3, 4$ , が存在して,  $\{\mathbf{S}^{*M,i}\}$  は  $\Delta_i$  がタイプ  $j$  のときに  $\lambda^{-M} B_j \mathbf{v}$  と同分布である.

(4)

$$\hat{P}[B_j > 0] = 1, E[B_j] = u_j, j = 1, 2, 3, 4.$$

また,  $B_j$  は正の確率密度関数をもつ.

(5)  $B_j, j = 1, 2, 3, 4$  のラプラス変換を  $\phi_j(t) = E[\exp(tB_j)]$  と表す. ここで,  $\phi_j$  は  $\mathbb{C}$  上の正則関数で, 次の方程式の解である.

$$\begin{aligned} \phi_j(\lambda t) &= \Phi_j(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t)), \\ \phi_j(0) &= 1. \end{aligned}$$

*Proof.* (1), (2), (3) と (4) の  $E[B_j] = u_j$  は, マルチタイプの優臨界分枝過程の一般論の極限定理から示される ([4] 参照). (4) の  $\hat{P}[B_j > 0] = 1$  は,  $\Phi_j$  の各項が 2 次以上であり定数項がないことからいえる ([4] 参照). (5) はラプラス変換が  $\mathbb{C}$  上正則であることの証明は, [3] を参照.

□

**定義 4.19** (9 タイプの再帰式). 第 3 章の再帰式を拡張する.

$$\vec{\Phi}_N(\vec{x}) := (\Phi_{N,1}(\vec{x}), \dots, \Phi_{N,4}(\vec{x})), \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

と定義する.  $\vec{z}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{z}_2 = (x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{R}^4, z = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, x_9) \in \mathbb{R}^9$  とおき,

$$\Theta_N(z) = \sum_{w \in \hat{W}_N^4} \hat{P}_{N,4}[w] \prod_{i=1}^9 x_i^{\tilde{s}_i(w)},$$

とする. 簡単のため  $\tilde{s}_i(w)$  は  $w \in \bigcup_{k=1}^4 \hat{W}_N^k$  でも同じ記号を用いている.

このとき、定理 3.7 と同様の証明から次が成り立つ.

**定理 4.20.**

$$\Theta_{N+1}(z) = \Theta_1((\vec{\Phi}_N(\vec{z}_1), \vec{\Phi}_N(\vec{z}_2), \Theta_N(z))).$$

$$(\vec{z}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{z}_2 = (x_5, x_6, x_7, x_8), z = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, x_9))$$

**定義 4.21** (9 タイプの平均値行列).  $\vec{z}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{z}_2 = (x_5, x_6, x_7, x_8), z = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, x_9)$  に対して,

$$H^N(z) = (H_1^N(z), \dots, H_9^N(z)) := (\vec{\Phi}_N(\vec{z}_1), \vec{\Phi}_N(\vec{z}_2), \Theta_N(z)).$$

と定義する. また,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^9$  とおく.

$$\partial H^N(z) := (\frac{\partial}{\partial x_1} tH^N(z), \dots, \frac{\partial}{\partial x_9} tH^N(z)),$$

と定義し,  $\tilde{\mathbf{M}} := \partial H^1(\mathbf{1})$  を 9 タイプの平均値行列とする. このとき,

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & M & & & & O & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & O & & & & M & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ m_{9,1} & m_{9,2} & m_{9,3} & m_{9,4} & m_{9,5} & m_{9,6} & m_{9,7} & m_{9,8} & m_{9,9} \end{pmatrix}$$

また,  $w = (w_1, w_2) \in \hat{W}_1^4$  に対して,  $m_{9,1}, m_{9,2}, m_{9,3}, m_{9,4}$  はそれぞれ  $w_1$  のタイプ 1 からタイプ 4 の平均の個数,  $m_{9,5}, m_{9,6}, m_{9,7}, m_{9,8}$  は  $w_2$  のタイプ 1 からタイプ 4 の平均の個数を表す. このとき, 明らかに  $m_{9,1}, m_{9,5} > 0$  が成り立つ.



**定理 4.22** (横断時間の収束).  $2^{-M}$  – 三角錐  $\Delta_i$  の横断時間は, ある非負の確率変数に概収束する. つまり,  $N \rightarrow \infty$  で

$$\lambda^{-N} \mathbf{s}_i^M(X^N) = \lambda^{-N} (T_i^{ex,M}(X^N) - T_{i-1}^{ex,M}(X^N)) \rightarrow \hat{s}_i^{*M}, \text{ a.s.}$$

*Proof.*  $\Delta_i$  がタイプ 1 からタイプ 3 のときは, 命題 4.18 より概収束する.  $\Delta_i$  がタイプ 4 のとき, 定義 4.17 のように 9 タイプにわけて考える.  $\Delta_i$  を通るパス  $w = (w_1, w_2)$  の  $w_1, w_2$  は同分布であり, それぞれの平均値行列は等しい. また,  $\tilde{l}(w_1) = \tilde{s}_1(w) + 2\tilde{s}_2(w) + 3\tilde{s}_3(w) + 2\tilde{s}_4(w) + \tilde{s}_9(w)$ .  $w_2$  も同様に,  $\tilde{l}(w_2) = \tilde{s}_5(w) + 2\tilde{s}_6(w) + 3\tilde{s}_7(w) + 2\tilde{s}_8(w) + \tilde{s}_9(w)$ . よって,  $w_1, w_2$  はそれぞれが横断したタイプ 1 からタイプ 4 の三角錐と  $\Delta_i$  のみを考えればよい. ゆえに, 命題 4.18 より概収束することがわかる.  $\square$

よって, 次の命題が成り立つ.

**命題 4.23.**  $T_i^{*M} = \sum_{j=1}^i (\hat{s}_1^{*M,j} + 2\hat{s}_2^{*M,j} + 3\hat{s}_3^{*M,j} + \hat{s}_4^{*M,j} + \hat{s}_5^{*M,j} + 2\hat{s}_6^{*M,j} + 3\hat{s}_7^{*M,j} + \hat{s}_8^{*M,j} + 2\hat{s}_9^{*M,j})$  とおくと,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_j^{ex,M}(X^N) = T_j^{*M}.$$

以上の考察から, 主結果である連続極限の存在を示す.

**命題 4.24** (連続極限の存在).  $N \rightarrow \infty$  のとき,  $X^N$  はある  $F$  上の連続過程  $X$  に  $t$  に関して一様収束する.

*Proof.* 命題 4.18 と命題 4.23 より,  $P$ –a.s.,  $\omega \in \Omega'$  に対して, すべての  $M \in \mathbb{Z}_+$  に対し,  $Y^M \in \hat{W}^M, \lim_{N \rightarrow \infty} T_i^{ex,M}(X^N) = T_i^{*M}$  が存在し, すべての  $i, (1 \leq i \leq k_M)$  に対して,  $T_i^{*M} - T_{i-1}^{*M} \geq 0$  が成り立つ. (ここで,  $k_M$  は  $\sigma'^M(Y^M)$  の要素の三角錐の個数を表す.)

$\epsilon > 0$  を任意にとり,  $R = T_1^{*0} + \epsilon$  とおく. 十分大きい  $N$  に対し,  $t > R$  ならば,  $X^N(t) = a_0$  である. よって,  $X^N(\omega, t)$  が一様収束であることを示すには,  $t \in [0, R]$  において考えればいい.

$M \geq 0$  を固定する.  $k = k_M$  とおく.  $a_0$  への到達時刻を,  $2^{-M}$  – 三角錐の通過時刻の和で表すことで,

$$T_k^{ex,M}(X^N) = T_1^{ex,0}(X^N) \text{ a.s.}$$

が成り立つから、 $N \rightarrow \infty$  で

$$T_k^{*M} = T_1^{*0} a.s.$$

を得る.

$\omega$  のとり方から、ある  $N_1 = N_1(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して、 $N \geq N_1$  ならば

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq k} |T_i^{ex,M}(X^N) - T_i^{*M}| &\leq \min_{1 \leq i \leq k} (T_i^{*M} - T_{i-1}^{*M}), \\ |T_k^{ex,M}(X^N) - T_k^{*M}| &< \epsilon. \end{aligned}$$

とできる.

$t \in [0, R]$  に対して、次の2つのどちらかを満たす.

(1)  $0 \leq t \leq T_k^{*M}$  のとき,

ある  $j \in \{1, \dots, k\}$  が存在し、 $T_{j-1}^{*M} \leq t < T_j^{*M}$ .

(2)  $T_k^{*M} \leq t \leq T_k^{*M} + \epsilon = R$  となる.

(1) のとき  $N \geq N_1$  に対して、

$$\begin{aligned} |T_{j-2}^{ex,M}(X^N) - T_{j-2}^{*M}| &\leq T_{j-2}^{*M} - T_{j-1}^{*M} \text{ より,} \\ T_{j-2}^{ex,M}(X^N) &\leq T_{j-1}^{*M} \leq t. \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} |T_{j+1}^{ex,M}(X^N) - T_{j+1}^{*M}| &\leq T_{j+1}^{*M} - T_j^{*M} \text{ より,} \\ t &\leq T_{j+1}^{ex,M}(X^N). \end{aligned}$$

よって、

$$T_{j-2}^{ex,M}(X^N) \leq t \leq T_{j+1}^{ex,M}(X^N)$$

となるので、

$$|X^N(T_j^{ex,M}(X^N)) - X^N(t)| \leq 4 \times 2^{-M}$$

を得る.

(2) のとき、 $T_{k-1}^{ex,M}(X^N) \leq t$  なので、

$$|X^N(T_j^{ex,M}(X^N)) - X^N(t)| \leq 3 \times 2^{-M}$$

を得る.

また, 命題 4.16 より  $X^N(T_j^{ex,M}(X^N)) = X^M(T_j^{ex,M}(X^N))$  が成り立つ.

(1), (2) から,  $N, N' \geq N_1$  ならば, 任意の  $t \in [0, R]$  に対して

$$\begin{aligned} |X^N(t) - X^{N'}(t)| &\leq |X^N(T_j^{ex,M}(X^N)) - X^N(t)| \\ &\quad + |X^{N'}(T_j^{ex,M}(X^{N'})) - X^{N'}(t)| \\ &\quad + |X^N(T_j^{ex,M}(X^N)) - X^{N'}(T_j^{ex,M}(X^{N'}))| \\ &\leq 7 \times 2^{-M}. \end{aligned}$$

$M$  は任意であったから,  $X^N$  は  $t$  に関して一様収束である

□

## 5 Appendix A

ここでは, 第 4 章ででてきた分枝過程の基本事項について紹介する.

**定義 5.1** (分枝過程). 確率変数の列  $\{Z_n\}_{n=0,1,\dots}$  を, 第  $n$  世代での粒子数とし  $Z_0 = 1$  とする. 各粒子は独立に次の世代に  $Y$  個の粒子を生じさせるとする. ここで,  $Y$  は独立同分布に従う  $\mathbb{Z}_+$ -値確率変数とし,  $P[Y = k] = p_k$  と定義する. ( $k \geq 0$ ) このとき, 明らかに  $\{Z_n\}$  はマルコフ過程となり, 第  $n$  世代から第  $n+1$  世代への推移確率は次で与えられる:

$$p(i, j) = P[Z_{n+1} = j | Z_n = i] = P\left[\sum_{k=1}^i Y_k = j\right], (i, j \geq 0)$$

また, 0 個の粒子からは何も生じないので  $p(0, j) = 0, p(0, 0) = 1$  である ( $j \geq 1$ ).

以上を満たすときに,  $\{Z_n\}$  を分枝過程という.

以下,  $\{Z_n\}$  はタイプ数を  $m$  とし, 第  $n$  世代の各タイプの粒子数を  $m$  次元ベクトルの形で表したものとする. また,  $\{Z_n^{(i)}\}$  は  $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  を初期状態とした分枝過程とする. ( $\mathbf{e}_i$  はタイプ  $i$  の粒子が 1 個の状態を表す)

**定義 5.2** (singular · strictly positive · positive regular). 分枝過程  $\{Z_n\}$  が確率 1 で 1 個の子孫しか残さないとき, **singular** であると定義する.

行列  $A$  が **strictly positive** であるとは、ある自然数  $n$  が存在して、すべての  $i, j$  に対して  $A^n$  の  $i, j$  成分が正となることとする。また、分枝過程  $\{Z_n\}$  が **positive regular** であるとは、その平均値行列  $\mathbf{M}$  が positive regular であることとする。

フロベニウスの定理より、strictly positive な行列は真に正の最大固有値をもつ。その右固有ベクトルを  $\mathbf{u}$ 、左固有ベクトルを  $\mathbf{v}$  とおき、 $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$  を満たすものとする。また、以下の定理では分枝過程  $\{Z_n\}$  は positive regular かつ nonsingular (singular でない) のものとし、 $\{Z_n\}$  の最大固有値を  $\lambda$  とおく。

**定理 5.3** (優臨界分枝過程の極限定理 1).  $\lambda > 1$  ならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\lambda^n} = \mathbf{v}W \text{ a.s.}$$

ここで、 $W$  は初期状態に依存する非負の確率変数で、

$$E[Z_{1,j}^{(i)} \log Z_{1,j}^{(i)}] < \infty, (i, j \in \{1, 2, \dots, m\}) \iff P[W > 0] > 0$$

**定理 5.4** (優臨界分枝過程の極限定理 2).

$$E[Z_{1,j}^{(i)} \log Z_{1,j}^{(i)}] < \infty, (i, j \in \{1, 2, \dots, m\})$$

を仮定する。 $W$  を定理 5.3 の極限の確率変数とする。このとき、次が成り立つ。

(1)  $E_i[W] = u_i, i = 1, 2, \dots, m$ . ここで、 $u_i$  は右固有ベクトル  $\mathbf{u}$  の第  $i$  成分を表し、 $E_i$  はタイプ  $i$  が 1 個を初期状態としたときの確率  $P_i$  の期待値とする。

(2)  $P_i[W = 0] = q^{(i)} = P_i[Z_n = 0 \text{ となる自然数 } n \text{ が存在}], i = 1, 2, \dots, m$ .

(3)  $\phi(x) := E_i[e^{-xW}], i = 1, 2, \dots, m$  は次を満たす。

$$\phi_i(x) = \mathbf{f}(\phi(\frac{x}{\lambda}))$$

ここで、 $\mathbf{f}(\mathbf{s})$  は子孫分布の生成関数であり、 $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$ .

(4)  $(0, \infty)$  で真に正の関数  $w_i(x)$  が存在して、任意の  $0 < a < b < \infty$  に対して、

$$P_i[a < W \leq b] = \int_a^b w_i(x) dx.$$

## 6 Appendix B

$\hat{W}_1^k$ 上のパスの種類と確率を,Mathematica を用いることで計算することができたのでいくつか紹介する. 実行結果は省略し, プログラムのソースコードのみとする.

(1) $\hat{W}_1^1$ のパス

```
a01={-3,1,1,1,0,0,0,0};a02={1,-6,1,1,1,0,1,1};
a03={1,1,-6,1,1,1,0,0};a04={1,1,1,-6,0,1,1,0};
a05 = {0,1,1,0,-6,1,1,1}; a06 = {0,0,1,1,1,-6,1,0};
a07={0,1,0,1,1,1,-6,1}; a08={0,0,0,0,0,0,0,0};
aconst8={a01,a02,a03,a04,a05,a06,a07,a08};
q={1,1,1,1,1,1,1,1};p={q,q,q,q,q,q,q};t1={1,1,1,1,1,1,1,1};

a=IdentityMatrix[8];
a=aconst8;aconsv=a;
aconsv8=IdentityMatrix[8];aa=IdentityMatrix[7];
xk={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7};xconst={xk,xk,xk,xk,xk,xk,xk};
xx=xconst;c=1;zen=0;
lep1={1};lep2={0,0};lep3={0,0,0};
lep4={0,0,0,0};lep5={0,0,0,0,0};
lep6={0,0,0,0,0,0};lep7={0,0,0,0,0,0,0};
lep8={0,0,0,0,0,0,0,0};
lepmat={lep1,lep2,lep3,lep4,lep5,lep6,lep7,lep8};

akesu1[i_] := Do[a[[j,i]]=0,{j,7}];
akesu2[i_] := Do[If[j==i,a[[i,j]]=1,a[[i,j]]=0],{j,7}];
xkesu[i2_] := Do[(If[m==i2,dummy,xx[[m,i2]]=1]),{m,7}];
lep=lep1;

ippo[le_, i_, s_] :=
(path1=Append[le, i];If[i==8,(Print["w",c,"=",path1];t1[[s]]=3/2;
pr1=6*Product[(1/6)*t1[[j]],{j,1,s}];zen=zen + pr1;c++;Print[pr1]),
dummy];lepmat[[s + 1]]=path1);

susumu[i_, k_, s_] :=
(xx=xconst;akesu1[i];akesu2[i];aconsv8[[s]]=a;xkesu[k];
Do[aa[[j]]=Delete[a[[j]],8],{j,7}];
b := Table[aa[[j]].xx[[j]]==0,{j,7}];
soln1=Solve[b, xk];solvalue1=xk /.soln1[[1]];
p[[i, k]]=1/(1 - solvalue1[[k]]);t1[[s]]=p[[i,k]]);

Do[(step=1;a=aconsv;If[a[[1,i1]]>0,(ippo[lepmat[[1]],i1,step];
If[i1==8,dummy,susumu[1,i1,step]]];
```

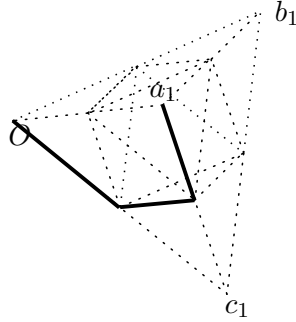
```

Do[(step=2;a=aconsv8[[step - 1]];
If[a[[i1,i2]]>0,(ippo[lepmat[[step]],i2,step];
If[i2==8,dummy,susumu[i1,i2,step]]];
Do[(step=3;a=aconsv8[[step - 1]];
If[a[[i2,i3]]>0,(ippo[lepmat[[step]],i3,step];
If[i3==8,dummy,susumu[i2,i3,step]]];
Do[(step=4;a=aconsv8[[step - 1]];
If[a[[i3,i4]]>0,(ippo[lepmat[[step]],i4,step];
If[i4==8,dummy,susumu[i3,i4,step]]];
Do[(step=5;a=aconsv8[[step - 1]];
If[a[[i4,i5]]>0,(ippo[lepmat[[step]],i5,step];
If[i5==8,dummy,susumu[i4,i5,step]]];
Do[(step=6;a=aconsv8[[step - 1]];
If[a[[i5,i6]]>0,(ippo[lepmat[[step]],i6,step];
If[i6==8,dummy,susumu[i5,i6,step]]];
Do[(step=7;a=aconsv8[[step - 1]];
If[a[[i6,i7]]>0,(ippo[lepmat[[step]],i7,step]),dummy)),{i7,8})),
dummy)),{i6,8})),dummy)),{i5,8})),dummy)),{i4,8})),
dummy)),{i3,8})),dummy)),{i2,8})),dummy)),{i1,8}];

Print["sum = ",zen];

```

このプログラムを実行すると、パス  $w \in \hat{W}_1^1$  (タイプ 1) は 213 本あることや、それぞれの確率がわかる。



例えば、このパスの確率は  $\hat{P}_{1,1}[w] = \frac{91}{1536}$ 。また、パスの通り方と確率から  $\Phi_1(\vec{x})$  が求まる。

$\Phi_1(\vec{x}) =$

$$\begin{aligned}
& \frac{17}{768}x_1^4 + \frac{91}{768}x_1^3 + \frac{53}{2304}x_1^3x_2 + \frac{1}{384}x_1^3x_3 + \frac{35}{4608}x_1^3x_4 + \frac{5}{16}x_1^2 + \frac{83}{768}x_1^2x_2 + \\
& \frac{1}{1152}x_1^2x_2x_3 + \frac{1}{192}x_1^2x_2x_4 + \frac{5}{768}x_1^2x_2^2 + \frac{35}{2304}x_1^2x_3 + \frac{35}{2304}x_1^2x_3x_4 + \frac{1}{512}x_1^2x_4^2 + \\
& \frac{364}{1539}x_1x_2 + \frac{1}{192}x_1x_2x_3 + \frac{1}{1536}x_1x_2x_4^2 + \frac{41}{1536}x_1x_2^2 + \frac{1}{1536}x_1x_2^2x_4 + \frac{1}{2304}x_1x_2^3 + \\
& \frac{49}{1152}x_1x_3 + \frac{1}{512}x_2^3 + \frac{25}{576}x_2^2 + \frac{1}{2304}x_2^2x_3 + \frac{35}{2304}x_2x_3 + \frac{1}{768}x_3^2.
\end{aligned}$$

また,  $w \in \hat{W}_1^2$ (タイプ 2) は 210 本あることがわかった.

最後に, パスのループや種類を考えるのに使用したものを紹介する.



## 参考文献

- [1] 服部哲弥 ” ランダムウォークとくりこみ群 ” 共立出版 (2004).
- [2] K. Hattori , M. Mizuno, ” *Loop-erased random walk on the Sierpinski gasket* ” ,Stochastic processes and their applications 124 (2014) 566-585.
- [3] B. Hambly , K. Hattori , T. Hattori, ” *Self-repelling walk on the Sierpinski gasket* ” , Probab. Theory Relat. Fields 124 (2002) 1-25.
- [4] K.B.Athreya , P. E. Ney, ” *Branching Processes* ” ,Springer (1972) .
- [5] C.J.Mode, ” *Multitype Branching Process* ” ,Elsevier,New York (1971) .

- [6] Shinoda, M., Teufl, E., Wagner, S., " *Uniform spanning tree on Sierpinski graphs*", Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 11 (2014) 737-780.